23. Coordonate stelare şi planetare

23.1. Coordonate stelare

Nu de multe ori, poate, v-ați întrebat dacă stelele pe care le priviți noaptea sunt situate toate la aceeaşi distanță sau, dimpotrivă, sunt împrăştiate aleatoriu prin spațiu. Răspunsul la această întrebare este următorul: stelele au, fiecare, coordonatele lor spațiale, iar pe baza acestor coordonate se poate măsura distanța dintre Pământ şi ele. Pentru a putea obține coordonatele unei stele, aveți nevoie de câteva cunoştințe minime de trigonometrie.

Primul pas în aflarea coordonatelor este calcularea declinației şi a ascensiei drepte a stelei.

Declinația unui corp ceresc este chiar latitudinea acelui punct pe cer, latitudine ce se obține prin prelungirea ecuatorului pe bolta cerească şi prin trasarea de paralele imaginare la el. Ea se măsoară în grade, minute şi secunde, iar pentru a o afla aveți nevoie de raportor pe care să-l fixați pe telescop astfel încât acesta să fie paralel cu orizontala. Următorul etapă ce trebuie parcursă este să priviți prin telescop steaua în momentul în care trece pe deasupra meridianului local. Astfel, veți obține declinația stelei cu o marjă de eroare de câteva minute. O altă metodă pentru determinarea ei este consultarea cataloagelor de stele.

Ascensia dreaptă reprezintă distanța unghiulară dintre meridianul 0° şi meridianul stelei observate. Pentru a afla ascensia dreaptă a unei stele este îndeajuns să cunoaştem ascensia dreaptă a cel puțin unui astru. Astfel, observați trecerea pe deasupra meridianului local a stelei a cărei ascensie dreaptă o cunoaşteți şi notați ora exactă a trecerii. Observați, apoi, trecerea stelei a cărei ascensie dreaptă doriți s-o aflați şi notați, de asemenea, ora exactă. Diferența dintre cele două ore este diferența ascensiilor dintre cele două stele.

Am discutat mais sus despre meridianul local şi probabil v-ați întrebat în ce fel poate fi acesta reperat. Aflarea lui este simplă şi nu necesită un efort deosebit.

Pentru a-l găsi, este necesar să vă orientați telescopul către Steaua Polară şi să fixați mişcarea telescopului exclusiv pe verticală. Astfel, veți avea un telescop orientat pe meridianul local.

După ce ați stabilit declinația şi ascensia dreaptă, procurați-vă de la un observator o listă cu distanțele dintre Pământ şi stele, sau cu paralaxa stelară (anuală) descrisă de stea pe cer (paralaxa fiind unghiul descris de o stea pe cer pe durata unui an). Pentru a obține distanța, aplicați formula 22.10.

Pasul următor este convertirea în grade a ascensiei şi a declinației, conform formulelor:

$$Phi = RA_{ore} \cdot 15 + RA_{minute} \cdot 0{,}25 + RA_{secunde} \cdot 0{,}0041666 \qquad (23.1)$$

$$Theta = Dec_{grade} + \left(\frac{Dec_{minute}}{60} + \frac{Dec_{secunde}}{3600}\right) \cdot Semn\left(Dec_{grade}\right) \qquad (23.2)$$

După ce am convertit RA şi Dec în grade, putem trece la calculul coordonatelor spațiale:

$$\begin{cases} Rvect = Rho \cdot \cos Theta \\ X = Rvect \cdot \cos Phi \\ Y = Rvect \cdot \sin Phi \\ Z = Rho \cdot \sin Theta \end{cases} \qquad (23.3)$$

unde *Rho* este distanța până la obiect. Ea poate fi exprimată în *al*, *parseci* sau *ua*.

Trebuie precizat faptul că aceste coordonate nu sunt coordonate galactice, pentru transformarea în coordonate galactice fiind nevoie de alte formule (Gliese 2000.0):

$$\begin{cases} X_g = -(0{,}0550 \cdot X) - (0{,}8734 \cdot Y) - (0{,}4839 \cdot Z) \\ Y_g = (0{,}4940 \cdot X) - (0{,}4449 \cdot Y) + (0{,}7470 \cdot Z) \\ Z_g = -(0{,}8677 \cdot X) - (0{,}1979 \cdot Y) + (0{,}4560 \cdot Z) \end{cases} \qquad (23.4)$$

unde s-a ținut seama de **Centrul galactic** şi de **Polul Nord galactic** aflate la coordonatele:

Centrul galactic**:** *RA = $17^h 45.6^m$; Dec = $-28^o 56.3'$*

Polul Nord galactic**:** *RA = $12^h 51.4^m$; Dec = $-27^o 07.7'$*

Având la dispoziție coordonatele mai multor stele, puteți întocmi hărți stelare bidimensionale cuprinzând doar coordonatele X, Y, coordonata Z nemaifiind necesară decât în cazul în care doriți realizarea unor hărți 3D cu ajutorul calculatorului. În vederea întocmirii de hărți stelare cu ajutorul calculatorului cât mai realistice, trebuie să se țină cont de rotirea pe axe a stelelor precum şi centrarea ecranului pe un anume obiect pentru ca, mai apoi, să se efectueze rotiri sau zoomuri în jurul său.

Formulele pentru rotiri şi pentru zoomuri sunt prezentate mai jos. Pentru centrarea ecranului pe o stea, nu trebuie decât să scădeți din toate coordonatele X, Y, Z pe cele ale stelei selectate.

i) Rotire

a) Axa Oz:

$$\begin{cases} Y = ((Y - Y_1) \cdot \cos alfa - (X - X_1) \cdot \sin alfa + Y_1) \cdot k \\ X = ((Y - Y_1) \cdot \sin alfa + (X - X_1) \cdot \cos alfa + X_1) \cdot k \end{cases} \quad (23.5)$$

b) Axa Ox

$$\begin{cases} Z = ((Z - Z_1) \cdot \cos alfa - (Y - Y_1) \cdot \sin alfa + Z_1) \cdot k \\ Y = ((Z - Z_1) \cdot \sin alfa + (Y - Y_1) \cdot \cos alfa + Y_1) \cdot k \end{cases} \quad (23.6)$$

c) Axa Oy

$$\begin{cases} X = ((X - X_1) \cdot \cos alfa - (Z - Z_1) \cdot \sin alfa + X_1) \cdot k \\ Z = ((X - X_1) \cdot \sin alfa + (Z - Z_1) \cdot \cos alfa + Z_1) \cdot k \end{cases} \quad (23.7)$$

unde *k* este o constantă, *alfa* este unghiul de rotire exprimat în radiani iar X_1, Y_1, Z_1 sunt coordonatele stelei în jurul căreia dorim să efectuăm rotirea.

ii) Zoom

$$\begin{cases} X = X \cdot k \\ Y = Y \cdot k \\ Z = Z \cdot k \end{cases} \quad (23.8)$$

unde pentru *k* cuprins între 0 şi 1 se simulează efectul de Zoom In iar pentru *k* mai mare apare efectul de Zoom Out.

Problema care se pune însă este ce facem atunci când dorim să aflăm coordonatele în ascensie şi declinație ale stelelor aşa cum ar fi ele văzute de pe o stea dată. De ce putem presupune că ne aflăm pe stea? Simplu. Pentru că oricum am considera spațiul vecin stelei, raza mică a presupusului sistem solar nu ar modifica într-o măsură prea mare aceste coordonate. Iată, însă, cum putem afla aceste coordonate operând nişte simple transformări asupra coordonatelor deja aflate X, Y, Z.

Mai întâi, trebuie să transformăm toate coordonatele astfel încât ele să aibă ca punct de origine (0,0,0) steaua dorită. Acest lucru se realizează printr-o simplă operație de translatare:

$$\begin{cases} X_{nou} = X - X_{stea\_selectata} \\ Y_{nou} = Y - Y_{stea\_selectata} \\ Z_{nou} = Z - Z_{stea\_sele\,ctata} \end{cases} \quad (23.9)$$

Această operație se repetă pentru toate stelele, inclusiv pentru steaua selectată ca fiind noul punct de origine. Odată obținute noile coordonate, putem trece la calculul efectiv al noilor declinații şi ascensii ale stelelor.

Să calculăm prima dată unghiurile *Theta* şi *Phi* şi distanța *Rho,* după cum urmează:

if (X_{nou} == 0) and (Y_{nou} > 0) then Phi = +90
if (X_{nou} == 0) and (Y_{nou} <= 0) then Phi = -90
if (X_{nou} > 0) and (Y_{nou} > 0) then Phi = $\tan^{-1} \frac{X_{nou}}{Y_{nou}}$
if (X_{nou} > 0) and (Y_{nou} <= 0) then PHI = $\tan^{-1} \frac{Y_{nou}}{X_{nou}}$ + 360
if (X_{nou} < 0) then PHI = $\tan^{-1} \frac{Y_{nou}}{X_{nou}}$ +180

if (Z == 0) then Theta = 0
if (Z <> 0) then
    if (X_{nou} <>0) and (Y_{nou} <>0) then
        Theta = $\tan^{-1} \frac{Z_{nou}}{\sqrt{X_{nou}^2+Y_{nou}^2}}$
    else
        Theta = +90 · SIGN(Z)
    end if
end if

Rho = $\sqrt{X_{nou}^2 + Y_{nou}^2 + Z_{nou}^2}$

După aceasta, putem trece la calcularea noii ascensii drepte *RA* şi a noii declinații *Dec*:

RA_{ore} = int($\frac{Phi}{15}$)
rest = Phi - (RA_{ore} · 15)
RA_{minute} = int($\frac{rest}{0,25}$)
rest = rest - (RA_{minute} · 0.25)
$RA_{secunde}$ = int($\frac{rest}{0,004166}$)

Dec_{grade} = int(Theta)
rest = Theta - abs(DEC_{grade})
Dec_{minute} = int(rest * 60)
rest = rest - ($\frac{Dec_{minute}}{60}$)
$Dec_{secunde}$ = int(rest · 3600)
Distanța = Rho

Dacă dorim să vedem stelele vizibile de pe cer, se impune să mai calculăm încă ceva, şi anume *magnitudinea absolută* şi *magnitudinea* vizuală ale stelelor văzute de pe steaua selectată:

$$Mag_{abs} = Mag_{aparent\ a_{Soare}} - \left(5 \cdot log\left(\frac{Distanta_{\ deSoare}}{10}\right)\right) \tag{23.10}$$

$$Mag_{aparenta} = \left(5 \cdot log\left(\frac{Distanta_{\ deSteaOrigine}}{10}\right)\right) + Mag_{abs} \tag{23.11}$$

Astfel, se pot crea hărți stelare reprezentând cerul nopții aşa cum este el văzut de pe o planetă imaginară aflată în jurul stelei selectate.

Lucrurile se complică puțin dacă dorim să vedem cerul aşa cum va fi sau aşa cum a fost la o anumită dată. Pentru aceasta, vom folosi o metodă descrisă în cele ce urmează. Pentru început, vom argumenta de ce nu vedem un cer static pe parcursul unor milenii sau ere întregi.

Stelele ce decorează cerul nopții par a fi nişte obiecte statice, însă realitatea este alta. Datorită distanțelor mari dintre ele nu putem percepe mişcarea lor prin spațiu. Însă, dacă am dispune de un accelerator temporal, am fi uimiți de mişcarea aparent haotică a acestora prin nelimitatul spațiu cosmic. Mişcarea stelelor prin spațiu este dată de două componente: **viteză radială** şi **mişcare proprie**. Vectorul de mişcare al unei stele este destul de complex însă, prin împărțirea acestuia în cele două componente enunțate mai sus, obținem doi vectori mai uşor de prelucrat. Vectorul de mişcare al stelei este numit **viteză spațială**.

Viteza radială este viteza cu care steaua se apropie sau se depărtează de Soare. Ea este uşor de determinat prin intermediul spectroscopului, deoarece spectrul stelei depinde în mare măsură de efectul *Doppler*. Majoritatea vitezelor radiale ale stelelor sunt cuprinse între 10-40 km/s, o valoare pozitivă însemnând că steaua se apropie de noi, iar una negativă că se depărtează de noi.

Mişcarea proprie (*mp*) este reprezentată de deplasarea stelei spre partea dreaptă sau stângă a cerului, aşa cum ar apărea ea văzută de pe Soare. Ea se măsoară atât prin compararea mai multor fotografii realizate de-a lungul anilor cât şi prin determinarea deplasării stelei observabilă de la o fotografie la alta. Însă, informația furnizată este, de obicei, mişcarea proprie anuală, mai precis câte secunde de arc se deplasează într-un an o stea dată şi este simbolizată prin litera grecească *Mu* (μ). Cea mai amplă mişcare o are Steaua lui *Barnard*, de circa 10,2 secunde pe an. Direcția de deplasare a unei stele pe cer poartă numele de *direcția deplasării proprii* şi este dată în grade.

Există mai multe situații posibile, în funcție de componentele cunoscute. În consecință, dacă sunt cunoscute componentele ecuatoriale ale mişcării proprii, mu_{RA} şi mu_{Dec}, atunci avem următoarele ecuații:

$$\begin{cases} mp_{RA} = mu_{RA} \cdot \cos Dec \\ mp_{Dec} = mu_{Dec} \end{cases} \qquad (23.12)$$

unde mu_{RA}, mu_{Dec} mp_{RA} şi mp_{Dec} sunt măsurate în $\frac{arcsec}{an}$.

Motivul pentru care am înmulțit mu_{RA} cu *cos(Dec)* este că liniile ascensiei drepte converg spre poli.

Alternativ, dacă sunt date mişcarea proprie (*mp*) şi unghiul de poziție al mişcării proprii (mp_{RA}), vom avea:

$$\begin{cases} \mathrm{mp_{RA}} = \mathrm{mp} \cdot \sin \mathrm{mp_{RA}} \\ \mathrm{mp_{Dec}} = \mathrm{mp} \cdot \cos \mathrm{mp_{RA}} \end{cases} \qquad (23.13)$$

unde *mp*, mp_{RA} şi mp_{Dec} sunt măsurate în $\frac{arcsec}{an}$.

Totuşi, uneori, sunt date direct componentele mişcării proprii *mp* şi, deci, nu mai este nevoie să trecem prin calculele efectuate în ecuațiile de mai sus.

Pentru obținerea componentelor vectorului viteză spațială, se divid componentele mişcării proprii la paralaxa exprimată în secunde de arc:

$$\begin{cases} V_E = 4{,}7406 \cdot \frac{mp_{RA}}{paralaxa} \\ V_N = 4{,}7406 \cdot \frac{mp_{Dec}}{paralaxa} \\ V_R = R_v \end{cases} \quad (23.14)$$

unde R_v este viteza radială, iar înmulțirea cu 4,7406 este realizată pentru a transforma unitatea de măsură din $\frac{ua}{an}$ în $\frac{km}{secunda}$.

Următorul pas este găsirea vitezei spațiale în coordonate ecuatoriale rectangulare:

$$\begin{cases} V_x = V_N \cdot (-\cos RA \times \sin Dec) + V_E \cdot (-\sin RA) + V_R(\cos RA \cdot \cos Dec) \\ V_y = V_N \cdot (-\sin RA \times \sin Dec) + V_E \cdot (-\cos RA) + V_R(\sin RA \cdot \cos Dec) \\ V_z = V_N \cdot \cos Dec + V_R \cdot \sin Dec \end{cases} \quad (23.15)$$

Ultima etapă o constituie convertirea acestor viteze în coordonate galactice conform ecuației 23.4.

Opțional, se pot transforma aceste viteze din $\boldsymbol{\frac{km}{s}}$ în $\boldsymbol{\frac{al}{an}}$ sau $\boldsymbol{\frac{parsec}{an}}$:

$$1\frac{km}{s} = 3{,}3355 \cdot 10^{-6}\frac{al}{an}$$

$$1\frac{km}{s} = 1{,}0226 \cdot 10^{-6}\frac{parsec}{an}$$

23.2. Coordonate planetare

Calculul pozițiilor corpurilor din sistemul nostru solar (Soarele, planetele, asteroizii şi cometele) presupune cunoaşterea elementelor orbitale ale acestora. Aşadar, pentru început, ne vom opri puțin asupra acestora din urmă. Există **şase elemente orbitale principale**, din care rezultă altele prin intermediul unor relații intermediare. Tabelul de mai jos conține principalele elemente dar şi explicația semnificației lor:

Element orbital	Explicație
N	**Longitudinea nodului ascendent**. Este unghiul de-a lungul eclipticii de la punctul vernal la *nodul ascendent*, care este intersecția dintre orbită şi ecliptică, adică locul unde planeta trece din sudul eclipticii în nordul acesteia.
i	**Înclinarea** față de planul eclipticii. Ea este relativă la ecliptică şi variază între 0 şi 180 de grade. O planetă cu o înclinare mai mare de 90 de grade se consideră a fi retrogradă.
ε	**Argumentul periheliului**. Este unghiul dintre nodul ascendent şi periheliu.
a	**Semiaxa** mare.
e	**Excentricitatea** (0-cerc, 0..1-elipsa,1-parabola).
M	**Anomalia intermediară** este 0 la periheliu şi 180 la afeliu şi este egală cu: $$M = n \times (t - T) = \frac{(t - T) \times 360}{P}$$

Tabel 23.1. Elemente orbitale

Aceste elemente sunt proprii fiecărui obiect, depinzând de poziția lui în spațiu. Aşa cum am mai spus, din ele derivă altele, de asemenea folositoare în calculul pozițiilor obiectelor din sistemul solar:

Longitudinea periheliului: $w_1 = N + w$

Longitudinea intermediară: $L = M + w_1$

Distanța la periheliu: $q = a \cdot (1 - e)$

Distanța la afeliu: $Q = a \cdot (1 + e)$

Perioada orbitală: $P = 365{,}256898326 \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}}$

unde *m* este masa planetelor (0 pentru asteroizi şi comete).

Timpul la periheliu: $T = Epoca - \frac{M}{360 \times P}$

Anomalia adevărată: unghiul dintre periheliu şi poziția corpului

Anomalia excentrică: E

Mişcarea zilnică: $\frac{360}{P}$

Anomalia intermediară (M) este uşor de calculat dacă dispunem de perioada orbitală şi de timpul curs de la periheliu. Ea este 0 la periheliu şi creşte uniform cu trecerea timpului.

Anomalia adevărată (v) este unghiul dintre planetă şi periheliu aşa cum este văzut de pe Soare.

Anomalia excentrică (E) este un unghi auxiliar folosit în ecuațiile lui Kepler pentru a calcula anomalia adevărată pe baza anomaliei intermediare şi a excentricității orbitale.

8.2.Calculul anomaliei adevărate folosind ecuaţiile lui Kepler

Ecuația lui Kepler este dată de formula următoare:

$$E - e \cdot \sin E = M \qquad (23.16)$$

$$\tan\frac{V}{2} = \frac{\sqrt{1+e}}{1-e} \cdot \tan\frac{E}{2} \qquad (23.17)$$

Există două metode de a calcula această valoare din ecuațiile lui Kelper:

Prima se referă la o simplă metodă iterativă iar cealaltă vizează obținerea în funcție de anomalia intermediară a unor serii pentru anomalia adevărată. Această ultimă metodă a devenit cunoscută sub denumirea de *Ecuația centrului*. În cele ce urmează, vom prezenta doar prima metodă, ea fiind şi cea mai simplă dintre ele, dar totodată şi cea care introduce unele erori de aproximare.

În cadrul acestei metode, începem calculul prin asumarea unei presupuneri şi, mai apoi, vom face apel la metoda iterativă pentru calculul valorii. Ne vom opri atunci când două estimări succesive sunt mai mici decât o valoare dată – fie ea, de exemplu, 0.000001 radiani. Schema de calcul este următoarea:

$$E_0 = M$$

$$E_1 = M + e \cdot \sin E_0$$

$$E_2 = M + e \cdot \sin E_1$$

$$E_3 = M + e \cdot \sin E_2$$

...

unde *M* este anomalia intermediară şi *e* este excentricitatea.

De remarcat la ecuațiile lui Kepler este faptul că prima dintre acestea este dificil de rezolvat deoarece presupune existența necunoscutei *E* atât în funcția trigonometrică cât şi în cea polinomială.

De ce este importantă cunoaşterea acestei valori? Răspunsul este relativ simplu şi se rezumă la legea ariilor a lui Kepler, care specifică faptul că o planetă străbate pe orbită arii egale, în intervale de timp egale. Ea are totodată tendința de a încetini la afeliu şi de a mări viteza la periheliu. Deci, dacă dorim să calculăm poziția planetei pe cer, trebuie să ştim poziția ei pe orbită şi, prin urmare, trebuie să găsim o metodă de a calcula longitudinea ei pe cer în fiecare instanță. Cu alte cuvinte, trebuie să cunoaştem anomalia adevărată şi intermediară a acesteia.

23.3. Legile lui Kepler

Pentru a determina mişcarea planetelor în spațiu, este necesară cunoaşterea celor trei legi fundamentale descoperite de către **J. Kepler** în anul 1619. Datorită faptului că demonstrarea acestor legi ține de o cu totul altă ramură, şi anume aceea a fizicii, vom prezenta în continuare doar enunțurile şi formulele aferente acestora.

1. **Plantele se mişcă pe elipse ce au Soarele în unul dintre focare.**
2. **Raza vectoare a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale (*legea ariilor*).**

$$S = \frac{1}{2 \cdot m_{planeta}} \cdot L \cdot t \qquad (23.18)$$

unde *S* este aria suprafeței descrise în timpul *t* de către corpul planetei de masă $m_{planeta}$. *L* reprezintă momentul cinetic şi se defineşte ca produsul vectorial dintre *r* şi *p* (impulsul corpului).

3. **Pătratele perioadelor de revoluție sunt direct proporționale cu cuburile semiaxelor mari** ($T^2 = C \cdot R^3$).

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi}{K \cdot M_{Soare}} \cdot R^3 \quad (23.19)$$

unde *K* este constanta gravitațională şi are valoarea $6{,}66 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg}$, M_{Soare} este masa Soarelui şi *R* este distanța de la planetă la Soare.

<u>Observație</u>: În cazul legii a treia, s-a considerat – pentru simplificarea datelor – că orbita este un cerc.

23.4. Atracția universală şi generalizarea legilor lui Kepler

Isaac Newton (1643-1727) a generalizat legile, presupunând că între orice pereche de forțe din univers se manifestă o forță de atracție. Această formă de atracție are forma:

$$F = K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \quad (23.20)$$

unde m_1, m_2 sunt masele corpurilor iar r_{12} este distanța dintre centrele lor. Constanta *K* este constanta universală şi are valoarea de la ecuația 23.19, aceasta putând însă fi determinată şi experimental prin **experiența lui Cavenish**.

Motivul pentru care Newton a introdus această forță a fost de a explica de ce planetele descriu orbite în jurul Soarelui. A reuşit să demonstreze trei lucruri în legătură cu aceasta: existența ei, formula matematică şi universalitatea acesteia.

Cunoscând această lege, putem deduce legile care guvernează toate mişcările corpurilor cereşti, fapt care constituie problema de bază a mecanicii cereşti. Aceste legi sunt legile generalizate ale lui Kepler:

1. **Un corp descrie o conică în jurul primului aşezat în unul dintre focare.**
2. **Razele vectoare descriu în planul orbitei arii proporționale cu timpul.**
3. **Fiind dat produsul dintre pătratul perioadei siderale de revoluție a unei planete şi suma maselor Soarelui, raportul dintre acesta şi cubul semiaxei mari a orbitei este constant.**

Aceste legi sunt valabile pentru orice corp: cometă, stele duble, sateliţi naturali şi artificiali.

Cunoscând de exemplu masa Soarelui, se poate determina masa oricărui corp din Sistemul Solar:

$$\frac{T_1^2 \cdot (m_{Soare} + m_{corp\ 2})}{T_2^2 \cdot (m_{Soare} + m_{cor\ p2})} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad (23.21)$$

Dacă rezolvăm ecuaţiile de mişcare ale unui corp în jurul altuia considerat fix, rezultă şase mărimi numite elementele orbitei (*tabelul* 23.1). Dacă avem la dispoziţie aceste elemente, putem determina efemerida planetei (*paragraful* 23.7). Aceasta nu ne dă însă poziţia exactă a obiectului din cauza perturbaţiilor corpurilor mari din jurul acestuia. Cunoscând poziţiile şi masele acestora, putem identifica orbita reală a planetei (la *paragraful* 23.6 se dă o metodă de calcul a orbitei reale folosind metoda perturbaţiilor). O consecinţă imediată este că, sub acţiunea acestor perturbaţii, orbita corpului suferă modificări. Astronomul român Spiru Haret (1851-1912) a arătat, însă, că aceste perturbaţii se compensează, nealterând structura Sistemului Solar.

Pe seama acestor perturbaţii sunt puse unele rezultate ştiinţifice ca cele ale descoperirii planetei Neptun de către Leverrier (1811-1877) în septembrie 1846 ca urmare a efectelor perturbatorii asupra planetei Uranus, precum şi a planetei Pluto în anul 1930. De asemenea, această metodă a contribuit şi la descoperirea altor sisteme planetare ca cel din jurul stelelor *61 Cygni* şi *70 Ophiuchi*. Un alt efect al perturbaţiilor este cel cunoscut sub numele de maree. Acestea ating 22 de metri în oceane (estul Canadei) şi câţiva centimetri în mările închise. La acestea se adaugă şi faptul că există şi maree terestre cu amplitudini de 35 de centimetri. Datorită formei aproape sferice şi a repartiţiei inegale a masei în scoarţa terestră, are loc fenomenul de precesie care este tot un efect al perturbaţiilor.

23.5. Poziția Soarelui

Calculul poziției Soarelui se face exact ca cel asupra oricărei alte planete. Singura deosebire este că, în cazul acestuia, formulele sunt puțin simplificate deoarece excentricitatea Soarelui este mică dar şi pentru că el se mişcă întotdeauna pe ecliptică.

Adevăratele poziții calculate aici sunt cele ale Terrei pe orbita în jurul Soarelui, dar pentru că privim totul dintr-o perspectivă geocentrică, ne vom imagina că de fapt Soarele se mişcă în jurul Terrei.

Calculul ei se face în cinci paşi:

Pasul 1 este calcularea **anomaliei excentrice** (E) din anomalia intermediară (M) şi din excentricitatea orbitei (e).

Pasul 2 este calcularea **distanței** (r) față de Terra şi față de **anomalia adevărată** (v).

Pasul 3 este calcularea **longitudinii adevărate** a acestuia şi convertirea ei şi a distanței *r* în **coordonate geocentrice rectangulare**.

Pasul 4 reprezintă convertirea coordonatelor rectangulare în **coordonate ecuatoriale**.

Pasul 5 este calcularea **ascensiei drepte** şi a **declinației** Soarelui.

Mai jos, sunt prezentate ecuațiile sistemului algoritmic de mai sus:

Pas 1:

$$E = M + e \cdot \sin M \cdot (1{,}0 + e \cdot \cos M) \tag{23.22}$$

Pas 2:

$$\begin{cases} x_v = r \cdot \cos v = \cos E - e \\ y_v = r \cdot \sin v = \sqrt{1{,}0 - e^2} \cdot \sin E \end{cases} \tag{23.23}$$

$$\begin{cases} v = \tan2^{-1} x_v, y_v \\ r = \sqrt{x_v^2 + y_v^2} \end{cases} \tag{23.24}$$

Pas 3:

$$long_{Soare} = v + \omega$$

$$x_s = r \cdot \cos long_{Soare}$$

$$y_s = r \cdot \sin long_{Soare}$$

Pas 4:

$$\begin{cases} x_e = x_s \\ y_e = y_s \cdot \cos ecl \\ z_e = y_s \cdot \sin ecl \end{cases} \quad (23.25)$$

Pas 5:

$$\mathrm{RA} = \tan2^{-1} y_e, x_e \quad (23.26)$$

$$Dec = \tan2^{-1} z_e, \sqrt{x_e^2 + y_e^2} \quad (23.27)$$

23.6. Poziția planetelor şi a Lunii

Algoritmul de calcul este asemănător cu cel de la calculul poziției Soarelui dar necesită unele corecturi cum ar fi cele datorate precesiei şi perturbațiilor marilor planete ca Jupiter, Saturn şi Uranus.

Pasul 1 este reprezentat de calculul **anomaliei excentrice** din anomalia adevărată şi din excentricitate. În ceea ce priveşte calculul valorii lui E, apar anumite probleme legate de aproximare. Dacă E este mai mic decât 0,05-0,06 atunci aproximarea este suficientă. În caz contrar, trebuie iterat:

$$E_i = E_{i-1} - \frac{e \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \sin E_{i-1}}{1 - e \cdot \cos E_{i-1}} \quad (23.28)$$

La fiecare iterație se înlocuieşte valoarea E0 cu E1 şi se repetă algoritmul până când cele două valori sunt suficient de apropiate.

Pasul 2 constă în calculul distanței *r* a planetei sau a Lunii față de Terra şi al **anomaliei** ei **adevărate** (v).

Pasul 3 este reprezentat de calculul poziției în spațiu a planetei. În privința Lunii, aceasta este poziția geocentrică, iar în cazul planetelor aceasta este poziția heliocentrică.

Pasul 4 constă în luarea în calcul a perturbațiilor Lunii şi a perturbațiilor marilor planete.

În primul caz (Luna), este necesară aplicarea unor algoritmi de luare în calcul a **perturbațiilor** doar dacă se doreşte o precizie mai mică de două grade.

Se calculează anomalia intermediară a Soarelui şi a Lunii (M_s *şi respectiv* M_m), longitudinea nodului lunar (N_m) şi argumentele periheliului pentru cele două obiecte (w_s *şi* w_m). Din acestea, rezultă altele necesare aproximării: **longitudinea intermediară** a Soarelui ($L_s = M_s + w_s$), a Lunii ($L_m = M_m + w_m + N_m$), **elongația intermediară** a Lunii ($D = L_m - L_s$) şi **argumentul latitudinii** pentru Lună ($F = L_m - N_m$). Termenii astfel obținuți se adaugă la longitudine:

$$long_m = long_m - 1{,}274 \cdot \sin(M_m - 2 \cdot D) + 0{,}658 \cdot \sin 2 \cdot D - 0{,}186 \cdot \sin M_s \quad (23.29)$$

şi la latitudine:

$$lat_m = lat_m - 0{,}173 \cdot \sin(F - 2 \cdot D) - 0{,}055 \cdot \sin(M_m - F - 2 \cdot D) - 0{,}046 \cdot \sin(M_m + F - 2 \cdot D) + 0{,}033 \cdot \sin(F + 2 \cdot D) + 0{,}017 \cdot \sin(2 \cdot M_m + F) \quad (23.30)$$

Ultima corecție reprezintă adăugarea la distanța Terra-Lună a termenilor:

$$+0{,}58 \cdot \cos(M_m - 2 \cdot D) - 0{,}46 \cdot \cos 2 \cdot D \quad (23.31)$$

În al doilea caz (marile planete), trebuie adăugați la longitudinea lui Jupiter următorii termeni :

$$-0{,}332 \cdot \sin\left(2 \cdot M_J - 5 \cdot M_S - 67{,}6\right) - 0{,}056 \cdot \sin\left(2 \cdot M_J - 2 \cdot M_S + 21°\right) + 0{,}042 \cdot \sin(3 \cdot M_J - 5 \cdot M_S + 21°) \quad (23.32)$$

Saturn:

$$+0{,}812 \cdot \sin(2 \cdot M_J - 5 \cdot M_S - 67{,}6°) - 0{,}229 \cdot \cos(2 \cdot M_J - 4 \cdot M_S - 2°) + 0{,}119 \cdot \sin(M_J - 2 \cdot M_S - 3°) + 0{,}046 \cdot \sin(2 \cdot M_J - 6 \cdot M_S - 2°) + 0{,}014 \cdot \sin(M_J - 3 \cdot M_S + 32°) \quad (23.33)$$

Uranus:

$$+0{,}040 \cdot \sin(M_S - 2 \cdot M_U + 6°) + 0{,}035 \cdot \sin(M_S - 3 \cdot M_U + 33°) - 0{,}015 \cdot \sin(M_J - M_U + 20°) \quad (23.34)$$

unde M_J, M_s şi M_U sunt anomaliile intermediare ale lui Jupiter, Saturn respectiv Uranus.

Pentru Mercur, Venus şi Marte perturbațiile pot fi ignorate, iar pentru Neptun singura perturbație semnificativă este inclusă în calculul elementelor orbitale ale planetei.

Pasul 5 este reprezentat de calculul **coordonatelor geocentrice** ale planetelor. La pasul 3 am calculat coordonatele heliocentrice ale planetelor şi geocentrice ale Lunii. Se transformă latitudinea şi longitudinea ecliptică în coordonate heliocentrice (x_h, y_h, z_h). Se calculează poziția Soarelui ca în algoritmul precedent şi se converteşte longitudinea şi latitudinea acestuia în x_s, y_s. Odată acestea calculate, se converteşte totul în coordonate geocentrice. Avem, aşadar, poziția planetei în coordonate rectangulare eliptice.

Pasul 6 constă în transformarea coordonatelor de la pasul 5 în **coordonate ecuatoriale** (RA şi Dec).

Pasul 7 se referă la calculul **poziției topocentrice a Lunii**, aşa cum este ea văzută de pe suprafața Terrei şi nu din centrul planetei.

Se calculează paralaxa Lunii şi se corectează altitudinea deasupra orizontului. Latitudinea astronomică (lat) trebuie convertită la latitudinea geocentrică (glat), iar distanța de la centrul Terrei trebuie exprimată în raze ecuatoriale. Se calculează apoi unghiul auxiliar *g*. Toate aceste calcule făcute, suntem pregătiți să aflăm valorile topocentrice ale Ra şi Dec.

Formulele pentru algoritm sunt prezentate mai jos:

Pas 1:

A se vedea formula 23.22.

Pas 2:

A se vedea formulele 23.23 şi 23.24

Pas 3:

$$\begin{cases} x_h = r \cdot (\cos N \cdot \cos(v + \omega) - \sin N \cdot \sin(v + \omega) \cdot \cos i) \\ y_h = r \cdot (\sin N \cdot \cos(v + \omega) + \cos N \cdot \sin(v + \omega) \cdot \cos i) \\ z_h = r \cdot (\sin(v + \omega) \cdot \sin i) \end{cases} \tag{23.35}$$

$$\begin{cases} lon_{ecl} = \tan2^{-1} y_h, x_h \\ lat_{ecl} = \tan2^{-1} z_h, \sqrt{x_h^2 + y_h^2} \end{cases} \tag{23.36}$$

Pas 4:

Formulele pentru corecția perturbărilor au fost date în algoritm.

Pas 5:

$$\begin{cases} x_h = r \cdot \cos lon_{ecl} \cdot \cos lat_{ecl} \\ y_h = r \cdot \sin lon_{ecl} \cdot \cos lat_{ecl} \\ z_h = r \cdot \sin lat_{ecl} \end{cases} \tag{23.37}$$

$$\begin{cases} x_s = r_s \cdot \cos lon_s \\ y_s = r_s \cdot \sin lon_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_g = x_h + x_s \\ y_g = y_h + y_s \\ z = z_h \end{cases} \tag{23.38}$$

Pas 6:

$$\begin{cases} x_e = x_g \\ y_e = y_g \cdot \cos ecl - z_g \sin ecl \\ z_e = y_g \cdot \sin ecl + z_g \cdot \cos ecl \end{cases} \tag{23.39}$$

de unde aplicând formulele 23.26 şi 23.27, rezultă RA şi Dec.

Raza geocentrică este dată de formula:

$$r_g = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2} \tag{23.40}$$

Pas 7:

$$m_{par} = \sin^{-1} \frac{1}{r}$$

$$alt_{top} = alt_{geoc} \_ m_{par} \cdot \cos alt_{geoc}$$

$$g_{clat} = lat - 0{,}1924° \cdot \sin 2 \cdot lat$$

$$rho = 0{,}99833 + 0{,}00167 \cdot \cos 2 \cdot lat$$

$$g = \tan^{-1} \frac{\tan g_{clat}}{\cos HA}$$

unde avem:

$$HA = LST - HA$$

$$LST = GMSTO + UT + \frac{long_{observator}}{15}$$

$$GMSTO = \frac{L_s + 180°}{15}$$

unde L_s este longitudinea intermediară a Soarelui.

$$\begin{cases} top_{RA} = RA - m_{par} \cdot rho \cdot \cos g_{clat} \cdot \frac{\sin HA}{\cos Dec} \\ top_{Dec} = Dec - m_{par} \cdot rho \cdot \sin g_{clat} \cdot \frac{\sin (g - Dec)}{\sin g} \end{cases} \qquad (23.41)$$

top_{Dec} se mai poate calcula şi astfel:

$$top_{Dec} = Dec - m_{par} \cdot rho \cdot \sin -Dec \cdot \cos HA \qquad (23.42)$$

Această formulă este valabilă în cazul în care *Dec* este de 90 de grade.

23.7. Calculul efemeridelor

Atunci când se cunosc pozițiile în spațiu ale obiectelor, este interesant de ştiut şi alte date despre ele cum ar fi **diametrul aparent**, **elongația**, **magnitudinea** şi **unghiul fazic**.

Diametrul aparent este calculat după formula: $\boldsymbol{D = \frac{D_0}{r}}$, unde *r* este distanța geocentrică şi D_0 este diametrul aparent la o distanță de 1 ua şi care este diferită pentru fiecare planetă în parte:

Soare 1919,26"

Mercur 6,74"

Venus 16,92"

Terra 17,59" ecuator şi 17,53" pol

Luna 1873,7"

Marte 9,6" ecuator şi 9,28" pol

Jupiter 196,94" ecuator şi 185,08" pol

Saturn 165,6" ecuator şi 150,8" pol

Uranus 65,8" ecuator şi 62,1" pol

Neptun 62,2" ecuator şi 60,9" pol

Unghiul fazic ne spune faza planetei. Dacă este 0 grade, atunci planeta este "plină", iar dacă este de 180 de grade, atunci ea apare ca "nouă".

Elongația ne spune distanța unghiulară aparentă a planetei de Soare. Atunci când valoarea sa este mai mică de 20 de grade, planeta devine dificil de observat, iar dacă este sub 10 grade ea nu poate fi văzută deloc.

Pentru calcularea elongației şi a unghiului fazic, sunt necesare **distanța heliocentrică** (r_h), **geocentrică** (r_g) şi distanța până la Soare (r_s).

Avem astfel:

$$elong = \cos^{-1}\frac{r_s^2+r_g^2-r_h^2}{2\cdot r_s\cdot r_g} \quad (23.43)$$

$$fv = \cos^{-1}\frac{r_h^2+r_g^2-r_s^2}{2\cdot r_g\cdot r_h} \quad (23.44)$$

Având unghiul fazic *fv*, putem calcula faza astfel:

$$faza = \frac{1+\cos fv}{2} \quad (23.45)$$

Luna necesită o abordare diferită pentru că în cazul în care am folosi formula de mai sus, ar surveni erori mult prea mari. În schimb, se va calcula elongația în funcție de **latitudinea** (lat_m) şi **longitudinea ecliptică** ($long_m$) a Lunii şi de **longitudinea eliptică** ($long_s$) a Soarelui.

$$elong_{Luna} = \cos^{-1}(\cos(long_s - long_m) \cdot \cos lat_m) \quad (23.46)$$

$$fv_{Luna} = 180° - elong_{Luna} \quad (23.47)$$

Magnitudea planetelor este calculată diferit pentru fiecare în parte, iar în cazul planetei Saturn trebuie luată în considerare şi magnitudinea inelelor. Formulele pentru calcularea magnitudinilor sunt:

Mercur: $-0{,}36 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}027 \cdot fv + 2{,}2 \cdot 10^{-13} \cdot fv^6$

Venus: $-4{,}34 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}013 \cdot fv + 4{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot fv^3$

Marte: $-1{,}51 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}016 \cdot fv$

Jupiter: $-9{,}25 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}014 \cdot fv$

Saturn: $-9{,}0 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}044 \cdot fv + magn_{inele}$

Uranus: $-7{,}15 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}001 \cdot fv$

Neptun: $-6{,}9 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}001 \cdot fv$

Luna: $+0{,}23 + 5 \cdot log_{10}(r_h \cdot r_g) + 0{,}026 \cdot fv + 4{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot fv^4$

Pentru inelele lui Saturn, trebuie ştiută înclinația lor (B).

$$B = \sin^{-1}(\sin lat_{Saturn} \cdot \cos ir - \cos lat_{Saturn} \cdot \sin ir \cdot \sin(long_{Saturn} - Nr)) \quad (23.48)$$

$$ir = 28{,}06°$$

$$Nr = 169{,}51° + 3{,}82 \cdot 10^{-5} \cdot d$$

unde *ir* este înclinația inelelor față de ecliptică şi *Nr* este nodul ascendent al planului inelelor.

Având toate aceste date, putem calcula în continuare magnitudinea inelelor planetei:

$$magn_{inele} = -2{,}6 \cdot \sin|B| + 1{,}2 \cdot \sin^2 B \quad (23.49)$$

23.8. Calculul poziției asteroizilor şi cometelor

În cazul asteroizilor, elementul orbital *N* diferă de la o zi la alta, deoarece asteroizii nu sunt stabili pe orbită. Acest element este singurul care diferă semnificativ pe durata unei zile. În această situație, *N*-ul dat trebuie convertit la *N*-ul curent astfel:

$$N = N_{EpocaVec\ he} + 0{,}013967 \cdot (2000.0 - Epoca) + 3{,}82394 \cdot 10^{-5} \cdot d \qquad (23.50)$$

Un alt element care diferă este *M* care, de obicei, este dat pentru o altă zi decât cea curentă. El poate fi calculat din perioada (P) de revoluție astfel:

$$M = M + \frac{360}{P} \qquad (23.51)$$

$$P = 365{,}2568984 \cdot a^{\frac{3}{2}}\,(zile) = 1{,}00004042 \cdot a^{\frac{3}{2}}(ani) \qquad (23.52)$$

Aceste elemente fiind calculate, poziția asteroizilor se calculează în mod analog planetelor.

În cazul cometelor, *M* nu e dat deoarece ele au orbite eliptice. Este, însă, dat **timpul** la **periheliu** (T), de unde poate rezulta *M*:

$$M = 360 \cdot \frac{d - dT}{P} \qquad (23.53)$$

unde *dT* este numărul zilei pentru momentul periheliului *T* iar *d* numărul zilei pentru data dorită.

Un alt element care poate lipsi este *a*. Dar **distanța la periheliu** poate fi calculată din *q*, astfel:

$$a = \frac{q}{1 - e} \qquad (23.54)$$

Un caz particular al **cometelor** este acela al corpurilor ce au o orbită parabolică. În acest caz, $\boldsymbol{P} = \infty$, *M = 0*, *e = 1*, $\boldsymbol{a} = \infty$. În locul lui *a*, vom folosi **distanța la periheliu** *q* şi:

$$H = (d - dT) \cdot \frac{k}{\sqrt{2} \cdot q^{\frac{3}{2}}} \quad (23.55)$$

unde *k = 0.01720209895* (**constanta guassiană**), *dT* numărul zilei pentru momentul periheliului *T* iar *d* numărul zilei pentru data dorită.

$$h = 1{,}5 \cdot H$$

$$g = \sqrt{1{,}0 + h^2}$$

$$s = \sqrt[3]{g + h} - \sqrt[3]{g - h}$$

$$v = 2{,}0 \cdot \tan^{-1} s$$

$$r = q \cdot (1{,}0 + s^2)$$

Ştiind **anomalia adevărată** şi **distanța heliocentrică,** putem calcula poziția în spațiu exact ca în cazul algoritmului pentru planete *Pasul 3*.

23.9. Şirul Titius-Bode

Există o aproximare a distanțelor planetare dată de şirul lui Titius-Bode. Ea este prezentată, aproximativ, în unități astronomice şi se calculează plecând de la o progresie geometrică cu primul termen 3 şi rația 2, punând înainte şi termenul 0. Adunând 4 şi împărțind la 10, obținem valoarea aproximativă a distanțelor planetare. Prin urmare, vom avea următoarea formulă:

$$D_n = \alpha + \beta * 2^{n-1} \quad (23.56)$$

unde $\alpha = 0,4$ şi $\beta = 0,3$ iar *n* este numărul planetei.

Există două excepții de la această regulă. Prima este că valorii de 2,8 ua nu-i corespunde nici o planetă ci doar valoarea medie a distanțelor micilor planete. A doua excepție este că pentru planeta Neptun (30,1 ua) nu există un corespondent în şir, deoarece termenului următor în şir îi corespunde planeta pitic Pluto. Având în vedere toate acestea, putem afirma că şirul în cauză nu este o lege dar are meritul de a fi primul care a semnalat existența golului dintre Marte şi Jupiter.

23.10. Calculul răsăritului şi al apusului

Răsăritul şi apusul unui obiect sunt folositoare atunci când se doreşte să se cunoască intervalul de timp în care acesta este vizibil. Există trei cazuri posibile în ceea ce priveşte vizibilitatea: obiectul poate fi circumpolar (vizibil tot timpul), tot timpul sub linia orizontului sau poate răsări sau apune la un anumit interval.

Un corp este circumpolar dacă **distanța zenitului** este mai mică de 90 de grade, altfel spus dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} Lat_{corp} \cdot Dec_{corp} > 0 \\ |Lat_{corp} + Dec_{corp}| > 90 \end{cases} \tag{23.57}$$

Un corp este permanent sub linia orizontului dacă distanța sa la zenit este mai mare de 90 de grade şi sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} Lat_{corp} \cdot Dec_{corp} < 0 \\ |Lat_{corp} - Dec_{corp}| > 90 \end{cases} \tag{23.58}$$

Cel mai elocvent exemplu de corp afectat de latitudine şi declinație este Soarele. Declinația acestuia este de $+\mathbf{23,5}°$. Acesta este circumpolar pentru un observator aflat deasupra Cercului Polar de Nord ($+\mathbf{66,5}°$) în timpul solistițiului de vară. În acelaşi timp, el rămâne tot timpul sub linia orizontului pentru un alt observator aflat sub Cercul Polar de Sud ($-\mathbf{66,5}°$). La echinocții, (declinație 0 grade) el este circumpolar la ambii poli, iar la solistițiul de iarnă (declinație $-\mathbf{23,5}°$) el este circumpolar pentru observatorul aflat sub Cercul Polar de Sud şi sub orizont pentru observatorul din Nord. În cazul în care observatorul este situat între cele două cercuri polare, el este vizibil pe cer o anumită perioadă de timp.

Evenimentele de răsărit şi de apus pot fi folosite pentru a determina latitudinea, longitudinea sau timpul. Rezultatele pot fi destul de imprecise din cauza faptului că refracția atmosferică poate fi destul de mare în cazul în care corpul este aproape de orizont.

Răsăritul şi apusul geometric ale unui corp apare atunci când centrul corpului trece prin orizontul celest (*H = 0*). Datorită refracției atmosferice toate corpurile exceptând Luna par a fi situate deasupra orizontului vizibil în acest moment. Motivul pentru care Luna nu e vizibilă în acest moment este acela că efectul de lăsare provocat de paralaxa orizontală (circa $\mathbf{1}°$) este mai mare decât efectul de ridicare al refracției atmosferice. Altitudinea aparentă în acest moment este de *15"* Soare, *29"* pentru stele şi *29" – HP* pentru planete.

$$\cos LHA = \frac{\sin h - \sin Lat_{corp} \cdot \sin Dec_{corp}}{\cos Lat_{corp} \cdot \cos Dec_{corp}} \qquad (23.59)$$

unde $h = -0{,}883 \cdot \frac{\pi}{180}$ radiani.

Se extrage arccosinus pentru determinarea *LHA* şi se calculează:

$$L = M + \omega$$

$$GMSTO = L + 180°$$

$$UT_{Soarele\_in\_sud} = \frac{RA - GMSTO - Long_{corp}}{15{,}0} \text{ (ore)} \qquad (23.60)$$

Ecuația 23.59 nu are soluție dacă arccosinus-ul este mai mic decât –1 şi mai mare decât 1. În primul caz, corpul este circumpolar iar în al doilea, el rămâne sub orizont tot timpul.

Timpul la care **răsare** este obținut scăzând din $UT_{Soarele\_in\_sud}$ valoarea arccosinus-ului exprimată în ore, iar **timpul** la **apus** se calculează adăugând la valoarea $UT_{Soarele\_in\_sud}$ valoarea arccosinus-ului exprimată în ore.

23.11. Crearea unei hărți polare stereografice

Atunci când se trasează o **hartă stelară** se realizează, de fapt, o reprezentare plană a sferei cereşti. Există numeroase căi de a transpune suprafața unei sfere pe un plan, însă una dintre cele mai simple este proiecția stereografică.

Istoria acestei metode de proiectare este lungă în istoria geografiei şi a astronomiei, ea fiind folosită multă vreme pentru a crea hărți stelare precum şi în astrolaburi. Ea are două proprietăți de bază:

1. toate cercurile de pe sferă sunt transpuse sub formă de cercuri pe planul proiecției.
2. unghiurile şi formele mici se conservă.

Cel mai mare dezavantaj îl constituie deformarea corpurilor de dimensiuni mici. De aceea, cercul este una dintre cele mai uşoare figuri ce pot fi reprezentate, pentru celelalte impunându-se calcularea unor curbe complexe.

Pentru a putea reprezenta o hartă stelară, este nevoie de câteva cunoscute:

1. Trebuie calculate coordonatele *X* şi *Y* din Ascensia dreaptă şi din Declinație.
2. Fiind dat un cerc mare de Ascensie dreaptă constantă sau unul mic de declinație constantă, trebuie calculate raza şi centrele cercurilor corespunzătoare pe planul de proiecție.
3. Fiind dat un arc de o anumită lungime pe un cerc mare sau mic, trebuie calculată lungimea arcului corespunzător pe planul proiecției.

Există variate moduri de a carta emisferele cerului. Planisferele utilizează de multe ori o proiecție polară azimutală (pivotul este **Polul Nord Ceresc: P.N.C.**), iar cercurile concentrice reprezintă declinațiile. Ascensiile drepte sunt linii drepte ce trec prin P.N.C. Cercurile complexe urmează curbe complexe, iar figurile constelațiilor devin foarte distorsionate sub o declinație de $-\mathbf{30}°$.

Proiecția stereografică conservă unghiurile, iar figurile constelațiilor rămân familiare în apropierea orizontului. Singurul lucru care se întâmplă cu ele este acela că devin mai mari. Orice cerc de pe sfera cerească poate fi reprezentat ca un cerc pe proiecția stereografică, dar cu rază şi centru modificate.

Formulele pentru coordonatele *X*, *Y* ale unui punct în planul proiecției sunt simple, dacă se cunosc altitudinea şi azimutul:

$$\begin{cases} X = \cos Az \cdot \tan \frac{90-Alt}{2} \\ Y = \sin Az \cdot \tan \frac{90-Alt}{2} \end{cases} \qquad (23.61)$$

unde A*z* este azimutul şi *Alt* este altitudinea. Ele se calculează pentru obiecte ale căror ascensie dreaptă şi declinație le ştim conform metodei de calcul de la paragraful 22.7.

De fapt, formulele ne indică nordul pe axa X.

Hărțile cereşti au trasate pe suprafața lor arcuri de cercuri mari ce reprezintă asterisme sau constelații, ele dovedindu-se utile pentru identificarea obiectelor, dat fiind faptul că întotdeauna vor exista pe cer constelații răsărite parțial sau în întregime.

Dacă luăm în considerare un singur arc de cerc, putem avea cinci cazuri care să descrie relațiile dintre acesta şi orizont.

Cazul 1: tot arcul este invizibil, el situându-se sub orizont.

Cazul 2: tot arcul este vizibil, el fiind proiectat corespunzător.

Cazul 3: un capăt al arcului se află deasupra orizontului, iar celălalt este sub linia orizontului. Trebuie aflate coordonatele punctului de intersecție a arcului cu orizontul.

Cazul 4: ambele capete sunt sub orizont, dar arcul taie linia orizontului în două poziții ce trebuie aflate.

Cazul 5: ambele capete sunt în afara liniei orizontului dar există doar un singur punct de contact.

Dintre acestea, cazurile 4 şi 5 sunt foarte rare şi prin urmare nu vor fi tratate în această lucrare. Doar cazul 3 prezintă o importanță datorită dificultății în calcule.

Avem de-a face, aşadar, cu un segment care are un capăt în interiorul planisferei şi celălat în afara ei, deci sub linia orizontului. Fie $P_1(x_1,y_1)$ punctul de sub linia orizontului, $P_2(x_2,y_2)$ cel de deasupra liniei şi un cerc de rază $r = 1$. Trebuie aflate coordonatele punctului de intersecție $P_a\ (x_a,y_a)$ a dreptei P_1P_2 cu $C(C_0,r)$, unde $C_0(0,0)$.

Rezolvare:

Ecuația dreptei ce trece prin P_1 şi P_2 este: $y = m \cdot x + n$. Ştim că P_1, P_2 aparțin dreptei, deci putem afla panta *m* şi *n* ca fiind:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{23.62}$$

de unde rezultă:

$$n = y_1 - m \cdot x_1 \tag{23.63}$$

Coordonatele lui $P_a(x_a,y_a)$ rezultă din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 1 \\ y = m \cdot x + n \end{cases} \quad (23.64)$$

Înlocuim pe *y* din a doua ecuație a sistemului 23.64 şi obținem în prima ecuație:

$$(m \cdot x + n)^2 + x^2 = 1$$

Sau:

$$(m^1 + 1) \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot x + n^2 - 1 = 0 \quad (23.65)$$

Rezolvând ecuația de gradul al doilea 23.65, vom avea:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{cases} \quad (23.66)$$

Obținem, prin urmare, două valori posibile pentru punctul $P_a(x_a,y_a)$. Valorile corecte rezultă din cele ce îndeplinesc condiția de mai jos:

$$\begin{cases} x_1 < x_a < x_2 \; sau \; x_2 < x_a < x_1 \\ y_1 < y_a < y_2 \; sau \; y_2 < y_a < y_1 \end{cases} \quad (23.67)$$

23.12. Crearea unei hărți ecuatoriale stereografice

Proprietățile expuse în paragraful 23.11 privind proiecția stereografică rămân valabile şi pentru acest tip.

Pe scurt, algoritmul presupune: pentru fiecare valoare a Asc. Dr., se alege un centru al proiecției diferit pe ecuator. De pildă, pentru Asc. Dr. 4 ore, centrul proiecției este 4 ore, sau +60° longitudine, latitudinea centrului de proiecție fiind 0°. Se poate alege, de exemplu, ca fiecare oră a unei Asc. Dr. să conțină un interval în longitudine, cuprins între -37,5° şi +37,5°**,** respectiv în latitudine între +60°N şi -30°S (acesta din urmă depinzând de poziția observatorului). Doar obiectele cu Asc. Dr. şi Dec. cuprinse în aceste intervale vor fi luate în considerare la calculul proiecțiilor.

Având Asc. Dr. (*RA*) exprimată în grade şi declinația (*Dec*) a unei stele, putem determina coordonatele stelei în planul de proiecție, astfel:

1) Verificăm dacă $\boldsymbol{RA} \in [\boldsymbol{min_{long}}, \boldsymbol{max_{long}}]$ şi $\boldsymbol{Dec} \in [\boldsymbol{min_{lat}}, \boldsymbol{max_{lat}}]$, unde $min_{long} = -37{,}5$ şi $max_{long} = +37{,}5$ respectiv $min_{lat} = -30$ şi $max_{lat} = +60$ pentru exemplul nostru. O ilustrare în acest sens a fost inserată în descrierea succintă a algoritmului. În caz afirmativ, continuăm cu pasul 2.

2) Determinăm coordonatele carteziene ale stelei:

$$\begin{cases} x' = \cos Dec \cdot \sin RA \\ y' = \sin Dec \\ x' = \cos Dec \cdot \cos RA \end{cases} \quad (23.66)$$

   În această situație, am apreciat că Polul Nord are coordonatele (0, 1, 0), punctul de proiecție are coordonatele (0, 0, 1), iar coordonatele Polului Sud sunt (0, -1, 0). Distanța de centru a stelei este considerată a fi egală cu unitatea.

3) Deducem coordonatele în planul proiecției:

$$\begin{cases} X = \frac{x'}{1+z'} \\ Y = \frac{y'}{1+z'} \end{cases} \quad (23.67)$$

Algoritmul poate fi generalizat prin repetarea paşilor **1-3**, pentru calculul unor planşe de câte 75° în longitudine şi 90° în latitudine (a se vedea exemplul de la descrierea generalizată a algoritmului) în cazul tuturor stelelor de pe cer sub o anumită magnitudine. În acest scop, se pot folosi cataloage de stele disponibile pe Internet. Acest lucru presupune însă o mică modificare a algoritmului. După cum se poate remarca, în cazul nostru pot fi proiectate numai stele cu o Asc. Dr. cuprinsă între -37,5° şi +37,5°. Pentru a generaliza problema, este necesar ca, după fiecare parcurgere a tuturor stelelor, să se reia paşii **1-3** cu acest interval modificat. De exemplu, 37,5° şi 112,5° ş.a.ş.m.d. fiecare interval având lungimea de 75°. Zonele polare necesită o prelucrare mai specială, în cazul lor putându-se recurge la o proiecţie polară stereografică.

4) O parte importană în elaborarea unei hărți ecuatoriale o constituie trasarea cercurilor de Declinaţie şi Ascensie Dreaptă

Fiecare astfel de cerc va avea un centru *(X, Y)* şi o rază *R*.

Plecând de la ipoteza conform căreia cercurile de longitudine constantă *long* sunt simetrice în raport cu meridianul polar şi cu cercurile de latitudine constantă *lat* simetrice raportate la ecuator, avem:

$$\begin{cases} Y_{long} = 0 \\ X_{lat} = 0 \end{cases} \tag{23.68}$$

respectiv coordonatele (X, Y) ale centrului cercurilor ce urmează a fi trasate:

-pentru cercurile de longitudine constantă

$$\begin{cases} X_{long} = \frac{-1}{\tan long} \\ Y_{long} = 0 \\ r_{long} = \frac{-1}{\sin long} \end{cases} \tag{23.69}$$

-pentru cercurile de latitudine constantă

$$\begin{cases} X_{lat} = 0 \\ Y_{lat} = \frac{1}{\sin lat} \\ r_{lat} = \frac{-1}{\tan lat} \end{cases} \tag{23.70}$$

Notă: Este posibil ca după calculul coordonatelor acestea să trebuiască scalate.